$<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k> \equiv L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ ο υπόχωρος που παράγεται από τα $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$

14° μάθημα
23/4/18

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$: ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του E, τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_\nu$ του E έτσι ώστε: $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_\nu\}$: ΟΚΒ του E.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $V = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$: ο υπόχωρος του E ο οποίος παράγεται από τα $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$

Τότε το σύνολο $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$: ΟΚΒ του V

Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $V^\perp$ ο οποίος έχει διάσταση: $\dim_{\mathbb{R}} V^\perp = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V < \infty$

Έστω $\{\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_\nu\}$: ΟΚΒ του $V^\perp$. Επειδή $E = V \oplus V^\perp$ έπεται ότι: $\{\underbrace{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k}, \underbrace{\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_\nu}\}$: βάση του E.

Προφανώς το σύνολο $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_\nu\}$: ΟΚΒ του E, διότι:

- $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$: ΟΚΒ του V.
- $\{\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_\nu\}$: ΟΚΒ του $V^\perp$
- $V \perp V^\perp$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ο υπόχωρος $V = L(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, όπου: $\vec{x}_1 = (1, -1, 0, 1)$

$\vec{x}_2 = (1, 0, -1, 0)$ του $\mathbb{R}^4$. Να βρεθεί ΟΚΒ του $V^\perp$ και να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του $(1,1,1,1)$ στον V.

Εύκολα βλέπουμε ότι τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2$: Γ.Α $\Rightarrow$ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$: βάση του V

Διαδικασία G - S: ① Θέτουμε $\boxed{\vec{y_1} = \vec{x_1} = (1,-1,0,1)}$

② $\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}) = \vec{x_2} - \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \cdot \vec{y_1} =$

$= (1,0,-1,0) - \frac{\langle (1,0,-1,0), (1,-1,0,1) \rangle}{\langle (1,-1,0,1), (1,-1,0,1) \rangle} \vec{y_1} =$

$= (1,0,-1,0) - \frac{1}{3}(1,-1,0,1) = \frac{(3,0,-3,0) - (1,-1,0,1)}{3} =$

$= \boxed{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{3}\right) = \vec{y_2}}$ $\|\vec{y_1}\| = \sqrt{3}$

$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ $\|\vec{y_2}\| = \sqrt{\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3} \rangle, (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}}$

Θέτοντας $\vec{e_1} = \frac{\vec{y_1}}{\|\vec{y_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)$

$\vec{e_2} = \frac{\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(2,1,-3,-1)$ έπεται ότι το

Ζεύγος $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$: ΟΚΒ του V

$\Pi_V \underbrace{(1,1,1,1)}_{\vec{z}} = \langle \vec{z}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} + \langle \vec{z}, \vec{e_2} \rangle \vec{e_2} = \ldots = \frac{1}{5}(1,-2,1,2)$

Επειδή $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$: βάση του $V \Rightarrow V^{\perp} =$

$\Rightarrow V^{\perp} = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} \langle \vec{a}, \vec{x_1} \rangle = 0 \\ \langle \vec{a}, \vec{x_2} \rangle = 0 \end{matrix} \right\}$

$\langle \vec{a}, \vec{x_1} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (x,y,z,w), (1,-1,0,1) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y + w = 0$

$\langle \vec{a}, \vec{x_2} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (x,y,z,w), (1,0,-1,0) \rangle = 0 \Rightarrow x - z = 0$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow V^{\perp} = \{ (x,y,x,y-x) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ x(1,0,1,-1) + y(0,1,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y \in \mathbb{R} \}$

$= L\left((1,0,1,-1), (0,1,0,1) \right)$

Θέτουμε: $\vec{x_3} = (1,0,1,-1)$, $\vec{x_4} = (0,1,0,1)$. Τότε:
$\{\vec{x_3}, \vec{x_4}\}$: βάση του $V^{\perp}$
Με διαδικασία G-S κ βάση $\{\vec{x_3}, \vec{x_4}\}$
δίνει μια ΟΚΒ του $V^{\perp}$: $\{\vec{y_3}, \vec{y_4}\}$ όπου:

$\vec{y_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)$

$\vec{y_4} = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$. Τότε τα

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{y_3}, \vec{y_4}\}$: ΟΚΒ του $\mathbb{R}^4$

$V \underset{\text{υπόχωρος}}{\subseteq} E \leadsto V^{\perp} \leadsto (V^{\perp})^{\perp}$ και:

$(V^{\perp})^{\perp} \underset{\text{ορ}}{=} V^{\perp\perp}$: διπλό ορθογώνιος υπόχωρος του V

$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} E < \infty \Rightarrow V = V^{\perp\perp}}$

ΑΣΚΗΣΗ (SOS) Αν $(E, \langle , \rangle)$: Ευκλείδειος χώρος, $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$ και αν V: υπόχωρος του E, τότε: $V = V^{\perp\perp}$

(ΑΠΟΔΕΙΞΗ) (ΛΥΣΗ):

$\vec{y} \in V^{\perp\perp} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \forall \vec{x} \in V^{\perp}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\forall \vec{x} \in V$: $\vec{x} \in V^{\perp\perp}$, δηλαδή: $V \subseteq V^{\perp\perp}$
Τότε: $\vec{x} \in V^{\perp\perp} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in V^{\perp}$. Όμως επειδή $\vec{x} \in V \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in V^{\perp} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{x} \in V^{\perp\perp}$. Άρα: $V \subseteq V^{\perp\perp}$ (1)

$\dim_{\mathbb{R}} E < \infty \Rightarrow E = V \oplus V^{\perp}$
$E = V^{\perp} \oplus V^{\perp\perp}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp}$

$\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} + \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp\perp}$

Άρα: $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp\perp}}$ (2) (1),(2) $\Rightarrow \boxed{V = V^{\perp\perp}}$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται ορθογώνιος $\Leftrightarrow \boxed{{}^tA \cdot A = I_n}$

Επειδή από την παραπάνω σχέση, έπεται ότι: $|A| \neq 0$, προκύπτει ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = {}^tA$

Επιπλέον: ${}^tA \cdot A = I_n \Rightarrow |{}^tA \cdot A| = |I_n| \Rightarrow |{}^tA| \cdot |A| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \pm 1}$

${}^tA \cdot A = I_n \Leftrightarrow \forall i,j = 1, \dots, n: ({}^tA \cdot A)_{ij} = (I_n)_{ij} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall i,j = 1, \dots, n: \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{ik} \cdot (A)_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow$

$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$\Leftrightarrow \forall i,j = 1, \dots, n: \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$

Άρα: ο $\boxed{A \text{ ορθογώνιος} \Leftrightarrow \forall i,j = 1, \dots, n: \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}}$

$\Leftrightarrow \forall i,j = 1, \dots, n \quad a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow \forall i,j = 1, \dots, n: \begin{cases} a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = 1, & \text{αν } i = j \\ a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

Ο χώρος των στηλών $\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$

είναι Ευκλείδειος Χώρος με εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$